

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{13n-2}{n+1} \right]$.

- a) Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulțimea $I_m \cap \mathbb{Z}$ să aibă exact 10 elemente.
b) Arătați că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $2^{2n+1} - (n+1)^2$ este o putere a lui 2.

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu O intersecția diagonalelor, cu M mijlocul lui (AB) și N mijlocul lui (BC) . Dreapta OM intersectează dreapta CD în P și dreapta ON

intersectează dreapta AD în Q . Fie $a = \frac{OC}{OA}$ și $b = \frac{OD}{OB}$.

- a) Exprimați vectorii $\overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{OQ}$ în funcție de numerele a, b și vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.
b) Știind că centrul de greutate al triunghiului ANP coincide cu centrul de greutate al triunghiului CMQ , demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

În triunghiul ABC , fie I centrul cercului înscris care este tangent la laturi în punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (CA)$. Notăm cu D', E', F' punctele diametral opuse lui D, E , respectiv F pe cercul înscris. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF, E'DF$, respectiv $F'DE$.

- a) Arătați că triunghiurile DEF și $H_1H_2H_3$ au același centru de greutate.
b) Demonstrați că dacă triunghiurile $H_1H_2H_3$ și ABC au același centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Fie $S = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}}$.a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(k+1)^2}} < \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} < \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{k^2}}$, pentru orice $k > 0$.b) Determinați partea întreagă a numărului S .

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru $X \subset \mathbb{R}$, notăm cu $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = x\}$, arătați că $f(A) = A$.*Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025*

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie $a, b, c \in (1, +\infty)$ astfel încât $abc = 2$. Să se arate că

$$\frac{1}{1 + \log_a b \cdot \log_2 c} + \frac{1}{1 + \log_b c \cdot \log_2 a} + \frac{1}{1 + \log_c a \cdot \log_2 b} \leq \frac{9}{4}.$$

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Rezolvați în $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sistemul
$$\begin{cases} z_1 \cdot |z_2| + z_2 \cdot |z_1| = 1 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = 1 \end{cases}$$
*Nelu Chichirim***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

- Arătați că A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, unde $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri de numere reale.
- Arătați că $a_n^2 + b_n^2 = (a^2 + b^2)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă $a^2 + b^2 < 1$ arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- Dacă $a^2 + b^2 = 1$, iar șirurile a_n și b_n sunt convergente, atunci $A = I_2$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB - BA)^{2025} = (AB - BA)^{2026}$. Atunci:

- $(AB - BA)^2 = O_2$.
- $AB + BA$ este inversabilă dacă și numai dacă $A \cdot B$ este inversabilă.

Gabriela Constantinescu

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim $A_n \in M_n(\mathbb{R})$, $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ prin

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i+j \text{ este un număr prim} \\ 0, & \text{dacă } i+j \text{ nu este număr prim} \end{cases}, \text{ pentru orice } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Calculați $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ și $\det(A_4)$.

- Notăm $B = A_3 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați B^{2026} .

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule cu proprietatea că $a_{n+1} > \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \text{ și } y_n = x_n + \frac{n+1}{n \cdot a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și au aceeași limită notată cu L .
- Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \cdot (L - x_n)$.

Nelu Chichirim

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

- a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $[a, \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea definită prin $x * y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați valorile parametrului real m pentru care operația "*" definită prin $x * y = 4xy - 6x - 6y + m, \forall x, y \in \mathbb{R}$ este o lege de compoziție pe mulțimea $I = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2025

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

- a) Arătați că $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in (-1, +\infty)$.
- b) Arătați că $\int_1^2 x \ln(1+e^{-x^2}) dx < \frac{e^3-1}{2e^4}$.

Prelucrare supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru.

- a) Dacă $a, b \in G, a^2 = b^3 = (ab)^5 = e$ și grupul este abelian, arătați că $a = b = e$.
- b) Arătați că există un grup G care conține elementele $a \neq e, b \neq e$ și $a^2 = b^3 = (ab)^5 = e$.
- c) Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, două câte două prime între ele și dacă $a, b \in G, a^x = b^y = (ab)^z = e$ și grupul este abelian, atunci $a = b = e$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

- a) Calculați $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx, x > 0$.
- b) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care admite o primitivă $F: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietățile: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0$ și $e^x \cdot f(x) \cdot \sin F(x) = 1, \forall x > 0$. Determinați f și F .

Cristina Homentcovschi

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.